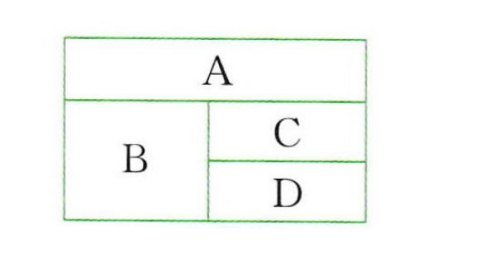
第10讲 数论综合（二）答案

1. 小学毕业时有4名学生和班主任一起拍照留念，如果这4名学生和班主任站成一排且班主任站在最中间，那么一共有多少种排队方法？

[思路导航]:排队问题是很典型的乘法原理的题目。站在不同的位置上拍出来的照片不同,解答此题需要分步完成。先固定位置，再选择这个位置上的人，最后把所有位置的选择数量相乘即可。注意,特殊位置要优先考虑。五人的位置序号:①②③④⑤。其中最中间的③号位置只能是班主任，不再选择其他人,即③号位置只有1 种选择。其余四个位置没有特殊要求,依次从左到右的考虑每个位置即可。①号位置有4种选择。①号位置占用了一个人，则②号位置有3种选择。①②号位置占用了2个人,则④号位置有2种选择,则⑤号位置还有1种选择,每个位置缺一不可。 解答: 4×3×1×2×1=24(种)

答:一共有24种排队方法。

1. 如图所示，图中有A、B、C、D四个区域，现用五种颜色给图染色，要使相邻区域的颜色不相同，有多少种不同的染色方法？

[解析]四个区域,每个区域都需要染色,则需要分四步来完成染色的工作。先考虑特殊位置,影响最大的位置,即先染相邻区域最多的B区域(C区域也可以)。

第一步:给B染色,有5种颜色可选;

第二步:给C染色,由于C不能与B同色,所以C有4种颜色可选;

第三步:给A染色,由于A不能与B、C同色,所以A有3种颜色可选;

第四步:给D染色,由于D不能与B、C同色,所以D有3种颜色可选。共有: 5×4×3×3=180(种)

1. 某条铁路线上，包括起点和终点在内原来共有7个车站，现在新增了3个车站，铁路上两站之间往返的车票不一样，那么，这样需要增加多少种不同的车票?

【解析]原来7个车站,起点有7种选择,则终点有6种选择,共有: 7×6=42(种)车票

现在起点有10 种选择,终点有9种选择，共有:10×9=90(种)车票所以增加:90-42=48(种)

4、一种电子表在10点28分6秒时，显示的时间如下图所示，那么从10点至10点半这段时间内，电子表上六个数字都不相同的时间有多少个？

【解析】 10:00: 00 至10:30:00 之间,每个位置数字都不相同的时间,则一定是 10:2a:bc的情况。从选择数字更少的特殊位置入手。a与c都相当于个位，在不考虑其他位置数字影响时,都可以选0~9,共10 个数字,而b的位置只能选 0~5,共6个数字。所以先分析b,后分析a与c。

b不能与 0、1、2 重复,b只能从3、4、5中选择,有3种选择;

c不能与 0、1、2 以及b重复,还有10一4=6(种)选择;

a 不能与 0、1、2、b 以及c重复,还有10-5=5(种)选择。

共有: 3×6×5=90(种), 即六个数字都不相同的时间有90个



**10.2 例题二解析**

1. 从0、1、2、3、4、5、这六个数组成的没有重复数字的全部五位数中取出一个数，这个数能被5整除的可能性是多少？

【解析】 此题需要考虑每个数位上数字的选择。先计算出没有重复数字的五位数有多少个，再计算出其中能被5整除,即5的倍数有多少个。可能性=满足条件的数的个数÷所有数的个数。在组数过程中，要注意特殊的数字“0”的位置,即“0”不能在最高位。在组成5的倍数时，0在个位时，其他数字的位置随意排，0不在个位时，个位必须是5。

解答 ：无重复数字的五位数有:5 × 5 × 4 × 3 × 2=600(个)

被5整除,个位为0的五位数有:1 × 5 × 4 × 3 × 2=120(个)

被5整除,个位为5的五位数有:1 × 4 × 4 × 3 × 2=96(个)

被5整除的五位数有:120+96=216(个)

可能性:216÷600=0.36

答:这个数能被5整除的可能性是 0.36。

1. 在1、2、3、4中任选三个数字组成三位数，其中是3的倍数的数共有多少个？

【解析]3的倍数,即各位数字之和能被3整除,选三个数字,有1、2、3和 2、3、4两种情况。

用1、2、3组成三位数:3 × 2 × 1=6(个)

用 2、3、4组成三位数:3 × 2 × 1=6(个) 共有:6+6=12(个)

7、某信号兵在红、黄、蓝、绿四面旗中选择旗子，并挂在旗杆上表示信号。每次可挂一面、二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号。一共可以表示多少种不同的信号？

【解析]信号可根据旗子的数量分为三类。

一面:从4种颜色中任选一种,有4种不同的信号。

二面:第一面旗子有4种选法,第二面旗子有3种选法,共4 × 3=12(种)；

三面：4 × 3× 2=24种，一共有4+12+24=40（种）

8、毛毛去餐厅吃午餐，由于去晚了，主食只剩下米饭和南瓜饼，肉菜只剩红烧肉、水煮鱼、水煮肉和回锅肉，而素食只剩下油麦菜和圆白菜.如果他对主食没有特殊要求(既可以点主食，也可以不点主食，既可以点一种主食，也可以点两种主食)，但肉菜至少要点两种，素菜也必须有，那么他有多少种不同的点菜方案？

【解析]主食有三种方式可选:不点主食、点一种主食、点两种主食，有:1+2+1=4(种),

肉菜至少要点两种,可以是两种、三种、四种。4种肉菜选2种有 4×3÷2=6(种)选择;

4种肉菜选3种,有4种选择;4种肉菜选择4种则只有1种选择。肉菜共计:6+4+1=11(种)

选择素菜有两种方式:点一种、点两种，有:2+1=3(种)

选择三类食物共有:4 × 11 × 3=132(种)选择。



**10.3 例题三解析**

9、有一本300页的故事书，随手翻开这本书，翻到的页码是3的倍数或者是5的倍数的可能性是多少？

【解析】 可能性=满足条件的个数÷总数，总页码是300 页，关键是要求出页码是3或者5的倍数的有多少页。这里需要用到容斥原理，先分别计算3的倍数和5的倍数，再排除其中重复计算的页码，即3和5的公倍数。

解答 ：页码是3的倍数的有:300➗ 3=100(页) 页码是5的倍数的有300➗5=60（页）

页码既是3的倍数又是5的倍数的有：300➗15=20（页）

页码是3或5的倍数有100+60-20=140页。

可能性就是：140➗300= 。

1. 某班共48人，参加书法小组的有30人，参加生物小组的有26人，其中这两个小组都参加的有13人。这个班上还有多少人没有参加这两个兴趣小组？

【解析]参加书法或者生物小组的有: 30+26-13=43(人) 都没有参加的有:48-43=5(人)

11、一次数学测试只有两道题，结果全班有10人全对，第一道题有25人做对，第二道题有185人做错，那么两道题都做错的有多少人？

【解析]只做对第一题:25-10= 15 （人） 即第一题做对且第二题做错的有15人。

两道题都做错:185-15=170(人)

12、在自然数1到1000中，不能被7和13整除的数有多少个？

【解析】7的倍数有：1000➗7=142……6，有142个；13的倍数有：1000➗13=76……12，有76个；

既是7又是13的倍数的数：1000➗91=10……90个，有10个；

7或13的倍数：142 + 76 -10=208 个，

不是7也不是13的倍数的数有1000 - 208 =792个。



**10.4 例题四解析**

13、一个两位数，十位上的的数字和个位上的数字交换位置后得到的新数是原数的 ，原数是多少？

【解析】 本题考查位值原理的完全拆分。设原两位数的十位数字是 x,个位数字是 y，即原数为xy，也可以用(10x十y)来表示这个两位数。

解答 解:设原两位数为xy。

10y+x=(10x+y) × ,， 解得 x:y=5:4

由于x、y是数字,则x=5,y=4。即原数为 54。

1. 一个两位数等于其个位数字的平方与十位数字的和，则这个两位数是多少？

[解析]解:设原两位数为xy，即10x+y。

10x+y=y²+x,可得 9x=yX(y-1)由于x、y是数字,且y和(y一1)互质。则y=9,x=9-1=8即原数为 89。

1. x，y，z是从1～9中任意选出来的三个不同的数字，那么用它们组成的六个没有重复数字的三位数的和是（x+y+z）的多少倍？

【解析】组成的6个三位数中:xyz、 xzy、yxz、yzx、zxy、zyx。 x在百位、十位、个位各出现了2次，和为222x。 进而得这6个三位数的和为222(x+y+ z),

显然和是(x十y+z)的 222 倍。

1. 有一个三位数，它等于去掉它的最高位数字之后剩下的两位数的7倍与66的和，则符合这个条件的三位数中，最大的是多少？

【解析]解:设这个三位数为abc。7 × bc+66= a b c ,可得3 ( bc +11)=50 a，则a一定是3的倍数。

当a=3时,得bc=39，此时三位数为339； 当a=6 时,得 bc =89，此时三位数为 689;

当a=9时,bc=139,不符合题意。综上,三位数最大为689。

17、把5写在某个四位数的左端得到一个五位数，把5写在这个四位数的右端也得到一个五位数，已知这两个五位数的差是22122，则这个四位数是多少？

【解析】 解:设这个四位数是abcd。（用竖式写）

情况 ①: 5abcd -abcd5=22122，可得 abcd=3097。情况 ②: abcd5 -5abcd =22122,可得 abcd=8013。

综上四位数为3097或8013。



**10.5 例题五解析**

18、将一个大于1的整数分别除167，352，574得到相同的余数，则这个整数位多少？

【解析】若m >n，且 m÷x……a

则(m-n)÷x……0

n÷x.……a

若m>n，且m和n分别被x除后的余数相同，则(m-n)被x整除。

本题中的这个整数去除这三个数两两相减的结果,余数为 0,即可整除。将有余数的问题变成整除问题，就可以用公因数相关知识来求解。

解：设这个整数为x。

因为 167 ÷ x ……a

（352 — 167 ) ÷x……0

352 ÷ x ……a ,则 ，所以x为185和222的公因数

（ 574— 352 ) ÷x……0

574÷ x ……a

因为185=5×37，222=2×3×37，则（185，222）=37.公因数中，大于1的只有37，就是37.

19、若2020、1032、652除以同一个整数，得到的余数都相同，则除数与余数的差最大是多少？

【解析】解：设这个整数为x，余数为a;

因为 2020➗x……a；

1. 用888、518、666这3个数分别除以同一个自然数，所得的余数依次位a，a+7，a+10。则这个自然数是多少？
2. 一个自然数除243，127，75所得的余数分别是a+7，2a，a，求这个自然数和a的值。
3. 三个连续的自然数，从小到大依次是4，7，9的倍数，这三个自然数的和最小是多少？
4. 有一箱苹果，甲班分，每人分3个还剩10个；乙班分，每人分4个还剩11个；丙班分，每人分5个还剩12个。那么这箱苹果至少有多少个？

24、有一个三位数，它除以2，4，6，7所得到的余数互不相同（不能余0），这样的三位数中最大的是多少？